PERSPECTIVES PHILOSOPHIQUES

REVUE IVOIRIENNE DE PHILOSOPHIE ET DE SCIENCES HUMAINES

UAO

Volume IX - Numéro 18 Décembre 2019 ISSN : 2313-7908

N° DEPOT LEGAL 13196 du 16 Septembre 2016

PERSPECTIVES PHILOSOPHIQUES

Revue Ivoirienne de Philosophie et de Sciences Humaines

Directeur de Publication : Prof. Doh Ludovic FIÉ

Boîte postale : 01 BP V18 ABIDJAN 01

Tél : (+225) 03 01 08 85
(+225) 03 47 11 75
(+225) 01 83 41 83

E-mail : administration@perspectivesphilosophiques.net

Site internet : http:// www.perspectivesphilosophiques.net

ISSN : 2313-7908

N° DEPOT LEGAL 13196 du 16 Septembre 2016

SOMMAIRE

LIGNE ÉDITORIALE

L'univers de la recherche ne trouve sa sève nourricière que par l'existence de revues universitaires et scientifiques animées ou alimentées, en général, par les Enseignants-Chercheurs. Le Département de Philosophie de l'Université de Bouaké, conscient de l'exigence de productions scientifiques par lesquelles tout universitaire correspond et répond à l'appel de la pensée, vient corroborer cette évidence avec l'avènement de *Perspectives Philosophiques*. En ce sens, *Perspectives Philosophiques* n'est ni une revue de plus ni une revue en plus dans l'univers des revues universitaires.

Dans le vaste champ des revues en effet, il n'est pas besoin de faire remarquer que chacune d'elles, à partir de son orientation, « cultive » des aspects précis du divers phénoménal conçu comme ensemble de problèmes dont ladite revue a pour tâche essentielle de débattre. Ce faire particulier proposé en constitue la spécificité. Aussi, *Perspectives Philosophiques*, en son lieu de surgissement comme « autre », envisagée dans le monde en sa totalité, ne se justifie-t-elle pas par le souci d'axer la recherche sur la philosophie pour l'élargir aux sciences humaines ?

Comme le suggère son logo, *perspectives philosophiques* met en relief la posture du penseur ayant les mains croisées, et devant faire face à une préoccupation d'ordre géographique, historique, linguistique, littéraire, philosophique, psychologique, sociologique, etc.

Ces préoccupations si nombreuses, symbolisées par une kyrielle de ramifications s'enchevêtrant les unes les autres, montrent ostensiblement l'effectivité d'une interdisciplinarité, d'un décloisonnement des espaces du savoir, gage d'un progrès certain. Ce décloisonnement qui s'inscrit dans une dynamique infinitiste, est marqué par l'ouverture vers un horizon dégagé, clairsemé, vers une perspective comprise non seulement comme capacité du penseur à aborder, sous plusieurs angles, la complexité des questions, des préoccupations à analyser objectivement, mais aussi comme probables horizons dans la quête effrénée de la vérité qui se dit faussement au singulier parce que réellement plurielle.

Perspectives Philosophiques est une revue du Département de philosophie de l'Université de Bouaké. Revue numérique en français et en anglais, *Perspectives Philosophiques* est conçue comme un outil de diffusion de la production scientifique en philosophie et en sciences humaines. Cette revue universitaire à comité scientifique international, proposant études et débats philosophiques, se veut par ailleurs, lieu de recherche pour une approche transdisciplinaire, de croisements d'idées afin de favoriser le franchissement des frontières. Autrement dit, elle veut œuvrer à l'ouverture des espaces gnoséologiques et cognitifs en posant des passerelles entre différentes régionalités du savoir. C'est ainsi qu'elle met en dialogue les sciences humaines et la réflexion philosophique et entend garantir un pluralisme de points de vues. La revue publie différents articles, essais, comptes rendus de lecture, textes de référence originaux et inédits.

Le comité de rédaction

L'AXIOMATIQUE FORMALISÉE : IDÉAL DÉDUCTIF OU ILLUSION D'UN IDÉAL DÉDUCTIF ?

Pancrace AKA
Université Félix HOUPHOUËT-BOIGNY d'Abidjan-Cocody (Côte d'Ivoire)
pancraceaka@yahoo.fr

Résumé :

Au XIXe siècle, une nouvelle méthode fit son apparition dans le domaine des sciences déductives : il s'agit de l'axiomatique formalisée. Par cette méthode, mathématiciens, logiciens et épistémologues, notamment ceux d'obédience formaliste eurent l'intention d'immuniser la logique et la géométrie de toute contamination intuitive afin de parvenir à un idéal déductif. Mais, à peine on a cru expulser l'intuition du champ de ces sciences, celle-ci resurgit au sein des axiomatiques formalisées. Illusion d'un idéal déductif !

Mots clés : Axiomatique formalisée, Géométrie, Idéal déductif, Logique, Métalogique, Métamathématique, Vérité.

Abstract :

In the nineteenth century, a new method appeared in the field of deductive sciences: the formalized axiomatic. During that period, mathematicians, logicians and epistemologists, namely those of formalistic allegiance intended to immunize logic and geometry from any intuitive contamination in order to come to a deductive ideal. But, as soon as they thought expel the intuition of the field of those sciences it suddenly re-emerged among the formalized axiomatics. Hence the illusion of a deductive ideal!

Keywords : Formalized axiomatic, Geometry, Deductive ideal, Logic, Metalogic, Metamathematic, Verity.

Introduction

La quête d'un idéal déductif est l'une des préoccupations épistémologiques majeures de nombreux mathématiciens, logiciens et épistémologues au XIXe siècle. Elle est consubstantielle aux différents problèmes suscités par les sciences déductives classiques, notamment la logique d'Aristote et la géométrie d'Euclide. La méthode déductive qui sous-tend ces sciences est largement critiquée à cette époque. À mesure qu'elle satisfait l'exactitude empirique en même temps que la rigueur logique, la méthode déductive incommode de plus en plus l'entendement des modernes en général. Elle est devenue intolérable et même absurde, à leurs yeux, pour une méthode qui se voulait rigoureuse voire idéale. Cette absurdité de la méthode déductive dans la science classique inclina les modernes, plus précisément les formalistes comme N. Bourbaki et D. Hilbert à la rectifier et/ou à lui substituer une autre méthode qui lui serait non seulement hautement supérieure, mais aussi susceptible de leur faire parvenir à une théorie déductive idéale : l'axiomatique.

L'axiomatique doit être entendue comme un pur formalisme, c'est-à-dire un système purement formel où il n'existe que de purs symboles abstraits, indépendamment de tout contenu intuitif. Il est donc question de l'axiomatique formalisée. L'axiomatique formalisée, en tant que système abstrait, devient la seule présentation valable par laquelle l'on peut savoir si l'on est, ou non, en présence d'une science déductive idéale. Plus clairement, une science déductive quelle qu'elle soit- la logique et la géométrie - pour être véritablement "déductive", c'est-à-dire rigoureuse ou idéale, doit faire l'objet d'une présentation axiomatique. Mais, est-il légitime de considérer l'axiomatique formalisée comme un idéal déductif ?

Notre étude appartient au domaine de l'épistémologie des sciences formelles. Elle vise à montrer, par une méthode historico-critique, qu'il est illusoire de croire que l'on parvienne à un idéal déductif ou une théorie déductive idéale en immunisant, grâce à la méthode axiomatique, les sciences déductives de toute contamination intuitive, contrairement à ce que pensent N. Bourbaki et D. Hilbert. Par « idéal déductif », il faut comprendre tout système déductif où l'on perçoit aisément la forme abstraite (la forme axiomatique), plus que la forme concrète ou intuitive sans toutefois résorber cette dernière. Les sciences déductives s'instruisent et se construisent toujours par leur contact avec l'intuition.

Afin de mieux saisir notre position, voici résumée autant que possible en trois parties essentielles, la marche générale de notre travail. La première exposera les raisons de l'émergence de l'axiomatique formalisée. La seconde partie s'attèlera à montrer comment cette méthode et ses réquisits donnèrent aux formalistes la certitude de parvenir à un idéal déductif ou une théorie déductive idéale. La troisième mettra en lumière l'illusion ou l'échec d'un idéal déductif au XIXe siècle, en raison de la résurgence de l'intuition dans les axiomatiques formalisées.

1. Les raisons de l'émergence de l'axiomatique formalisée : les failles de la déduction classique

Des siècles durant, la logique aristotélicienne et la géométrie euclidienne ont été prises pour des paradigmes de théorie déductive, au point de juger stérile et superfétatoire leur révision critique jusqu'au XVIIIe siècle. Mais, il n'en va plus de même au XIXe siècle, où l'on assiste à une remise en cause de leur statut logique. Les modernes décèlent, depuis cette époque, les failles de la déduction classique. La rigueur logique exacerbée par ces derniers a permis de mettre en évidence les ambiguïtés de la démonstration classique.

La démonstration classique est la démonstration ou déduction en vigueur dans les sciences déductives classiques précitées. Les modernes ont remarqué la forte présence de l'intuition dans la déduction classique. Sa présence rendait cette dernière catégorique, de sorte que la vérité qui en découlait fut à l'abri des critiques. C'est l'intuition qui nous a fait prendre les sciences déductives classiques pour des théories déductives idéales, alors qu'elles ne l'étaient qu'en apparence. Comme l'écrit I. Lakatos (1984, p. 183), parlant du style euclidien :

> Dans le style déductiviste toute proposition est vraie, toute inférence valide, les mathématiques sont présentées comme un ensemble toujours plus vaste de vérités éternelles et immuables. Contre-exemples, réfutations, critiques ne peuvent y pénétrer. L'exposé se donne des airs de certitude en commençant par des définitions déguisées issues des preuves et à l'épreuve des monstres, et par le théorème dans sa forme définitive, faisant disparaître la conjecture primitive, les réfutations et la critique de la preuve.

Il ressort de cette pensée de l'auteur trois idées-forces : la première est que la mathématique d'Euclide, ou du moins sa géométrie, est présentée comme une théorie déductive idéale, puisque toute proposition est considérée comme vraie et toute déduction est nécessairement valide. La seconde est que le style euclidien considère les mathématiques comme un tout, un système à l'intérieur duquel la vérité est éternelle et immuable ; c'est-à-dire qu'elle revêt un caractère catégorique. Plus précisément, la géométrie d'Euclide est un système catégorico-déductif. La vérité qui en découle est de nature catégorique. La troisième expose clairement les défauts de l'édifice euclidien. Selon I. Lakatos, l'exposé déductif d'Euclide n'est rigoureux qu'en apparence, étant donné qu'il commence par des définitions factices. La déduction euclidienne est donc une déduction factice.

Par ailleurs, R. Descartes, malgré son rationalisme affiché n'a pas manqué d'introduire subrepticement l'intuition - la notion d'évidence - dans la démonstration mathématique. Pour lui, « il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes ». (R. Descartes, 1966, p. 40). Et cela, après avoir bâti une métaphysique dans laquelle il a admis que les choses que nous concevons clairement et distinctement ne sont toutes vraies que, parce qu'elles sont assurées par un Dieu parfait qui existe.

> Si Leibniz objecte à Descartes qu'on ne voit pas à quoi on reconnaît qu'une idée est claire et distincte, il considère lui, aussi, les axiomes comme des conséquences évidentes et inéluctables des définitions, dès que l'on en comprend les termes. (N. Bourbaki, 1969, p. 22).

À la suite de R. Descartes, un auteur comme E. Kant (1944, p. 15) faisait remarquer à propos de la logique qu'elle était, depuis Aristote, restée close et achevée. En effet, E. Kant pensait que la logique aristotélicienne était irréprochable. L'on ne devait ni rien ajouter, ni rien retrancher à cette logique qui lui paraissait idéale. Aux yeux d'E. Kant, la logique d'Aristote était un prototype de théorie déductive. En réalité, Aristote introduisit furtivement l'intuition dans sa logique, car il voulait assurer une certaine solidité à l'ensemble de son système déductif. Incorporée à la logique aristotélicienne, l'intuition donnait des airs de certitude à cette dernière comme ce fut le cas de la géométrie euclidienne. C'est donc l'intuition qui a fait qu'E. Kant a pris la logique aristotélicienne pour une théorie déductive idéale, alors qu'elle ne l'était qu'en apparence. L'intuition rendait catégorique le système déductif aristotélicien et donnait lieu à une vérité mixte ou hétérogène : vérité logique et vérité matérielle des propositions. C'est pourquoi malgré son criticisme, E. Kant ne s'était pas du tout rendu compte des lacunes de la logique aristotélicienne.

Les systèmes déductifs classiques sont des systèmes catégorico-déductifs. R. Blanché (1959, p. 6) est d'un avis analogue : « Dans l'interprétation traditionnelle, la démonstration mathématique était catégorique et apodictique ». Dans un autre de ses ouvrages, il fait le même constat à propos de la logique d'Aristote, en notant ceci : « La syllogistique d'Aristote doit [...] être entendue comme un système catégorico-déductif ». (R. Blanché, 1970, p. 60). Que devons-nous entendre par système catégorico-déductif ? Une chose est dite catégorique, lorsqu'elle est claire et nette, c'est-à-dire sans équivoque, voire indubitable. Par conséquent, elle s'impose d'elle-même de façon nécessaire. Les systèmes déductifs aristotélicien et euclidien sont dits catégoriques, puisqu'ils reposent sur des axiomes qui étaient posés d'emblée comme vrais et nécessaires. S'imposant pour ainsi dire nécessairement, ceux-ci affirmaient *ipso facto* leur puissance sur toute la démarche démonstrative. De cette façon, ils avaient une posture autoritaire. Qu'est-ce à dire ?

Il y a, en effet, avant tout, une nécessité inhérente aux propositions initiales, appelées axiomes ou principes. Cette nécessité se transmet par la suite aux autres propositions qui en sont déduites, à savoir : les théorèmes. En réalité, la démonstration n'a pour office que de transférer l'absolue vérité des premières (propositions initiales) aux secondes (propositions que nous déduisons). En ce sens, R. Blanché (1959, p. 6), parlant de la démonstration euclidienne, écrit : « ces principes étant vrais absolument, telle proposition, que j'en déduis, est donc vraie aussi. Un tel procédé, Aristote l'appelait : le syllogisme du nécessaire ». Il s'agit bien entendu du syllogisme parfait : le syllogisme, en tant qu'il n'a besoin de rien d'autre que ce qui est donné dans les prémisses, pour que la nécessité de la conclusion soit évidente. Chez Aristote, seule, l'induction- en tant qu'acte de la sensation produisant en nous l'universel- nous fait connaître les prémisses nécessaires. À mesure que l'intuition nous assurait et même nous rassurait de la nécessité des prémisses, de leur absolue vérité, le Stagirite faisait de façon consciente ou non l'amalgame entre deux types de vérité totalement différentes : vérité logique et vérité matérielle des propositions.

Dans le système euclidien, cette présence de l'intuition se traduit par l'usage excessif que le géomètre fait de la rhétorique tout au long de son exposé déductif. L'usage permanent de l'intuition au sein des systèmes déductifs classiques donnant naissance à une vérité catégorique, une vérité mixte - l'intuition unit à la fois la vérité matérielle des propositions et la vérité logique de celle-ci - révélait les ambiguïtés des méthodes classiques de démonstration. R. Blanché donne un certain nombre de preuves. L'examen de la première proposition d'Euclide constitue pour lui un véritable problème :

> Construire un triangle équilatéral sur un segment de droite donnée AB. On décrit deux cercles de rayons AB, l'un de A comme centre, l'autre de B : le point d'intersession M, dont la distance à A ou à B est celle du rayon AB, sera le troisième sommet cherché. Mais pour qui ne voit pas ou ne se représente pas mentalement la figure, la démonstration est déficiente : comment sait-on que les deux cercles se coupent ? L'existence du point M a été montrée, non démontrée. (R. Blanché, 1959, p. 13).

On voit avec beaucoup plus de netteté en quel sens la présence de l'intuition rend la démonstration confuse. De la même façon, l'examen de la 15e définition du géomètre montre que ses définitions ne sont des définitions qu'en apparence. Elles désignent et elles décrivent plus qu'elles ne définissent. Ce sont de simples descriptions empiriques, semblables à celles que donnerait un dictionnaire dans le but de diriger l'esprit vers la notion qu'il s'agit d'analyser. En réalité, ces descriptions (définitions) réunissent deux entités de nature hétérogène. Si l'une est de nature formelle (proposition), l'autre en revanche est de nature empirique (dénomination). La 15e définition s'énonce comme suit : « Le cercle est la figure plane terminée par une ligne telle que toutes les droites qui la joignent à un certain point intérieur à la figure soient égales entre elles ». (R. Blanché, 1959, p. 14). Pour R. Blanché, une telle définition signifie deux choses tout à fait différentes : d'une part, « il est possible de terminer une figure plane par une ligne telle que…, etc. ». Ce premier énoncé est une assertion tandis que le second énoncé, et d'autre part, « on appellera ''cercle'' une telle figure », ne concerne que le langage. Il n'apporte rigoureusement rien à la science géométrique. Partant, il ne concerne en aucun cas la vérité géométrique.

Ces brèves considérations soulignent plus que jamais, l'impérieuse nécessité pour les modernes de mettre au point, une nouvelle méthode qui puisse être à même de supplanter l'intuition par la logique dans les sciences déductives : il s'agit de l'axiomatique formalisée.

2. Les principaux réquisits de l'axiomatique formalisée

L'axiomatique formalisée doit être cernée comme un « ensemble formalisé, vidé de tout contenu empirique, fondé sur un groupe de propositions et de termes premiers (les axiomes), à partir desquels on peut définir et démontrer les autres termes ». (J. Russ et C. Badal-Leguil, 2004, p. 37). L'axiomaticien procède par axiomes, et déduit à partir de ces derniers. Sa tâche consiste à révéler les liens purement logiques entre les termes et les propositions du système. Leur sens intuitif, voire leurs applications concrètes ne relèvent pas de sa compétence. Il y a un revirement du centre d'intérêt des sciences déductives - la logique et la géométrie - au XIX^{e} siècle. On délaisse la vérité matérielle des propositions pour n'accorder du crédit qu'à leur armature logique. Seules les relations purement formelles interviennent dans les différentes démonstrations faites à l'intérieur de toute théorie axiomatique.

Le caractère formalisé de l'axiomatique suppose avant tout une symbolisation. L'axiomatique apparaît, en ce sens, comme une langue artificielle au-dessus de la langue ordinaire. En tant que métalangue, elle est considérée comme un ensemble de signes abstraits (symboles) bien réglé formant un système que l'on peut manipuler, tout en respectant les règles dudit système. Sur cette base, chacun est libre de créer son axiomatique, qui n'est rien d'autre qu'un système abstrait qui n'entretient aucun commerce avec l'intuition ou la réalité empirique. Comme l'écrit N. Bourbaki (1962, p. 35-47) à propos des mathématiques : « Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites ». Nous sommes manifestement en présence du constat suivant : l'axiomatique s'occupe des opérations qui portent sur des symboles et non sur les idées.

C'est un tel constat que fait R. Blanché (1996, p. 14) à propos de la logique contemporaine, lorsqu'il écrit ceci :

> Dans la logique contemporaine, toutes les locutions, que nous avons écrites ci-dessus dans le langage ordinaire [si…alors, tout, et] sont remplacées par des symboles *ad hoc* […]. Il ne faut pas ici s'arrêter à des apparences superficielles. L'essence du symbolisme ne réside nullement dans l'usage de signes bizarres et inaccoutumés.

Pour lui, la logique contemporaine, qui est une logique axiomatisée ou symbolique, répond au souci d'éviter les irrégularités et amphibologies du langage ordinaire. Partant, le symbolisme n'a d'intérêt logique que dans la mesure où il est lié à la création d'une langue artificielle, ayant les propriétés suivantes :

> 1. Cette langue, système de signes écrits, de caractères, n'a aucun rapport avec la langue, organe de phonation. […]. 2. L'écriture d'une langue muette ne saurait être phonétique : c'est nécessairement une idéographie […]. 3. Nous sommes ainsi conduits au caractère essentiel : la substitution de la forme logique aux formes grammaticales plus exactement : la substitution, aux grammaires de nos langues naturelles, d'une grammaire où les formes du discours soient exactement calquées sur les formes logiques. (R. Blanché, 1996, p. 14-15).

Il y a une redéfinition de l'axiomatique, et même une réorientation de celle-ci à l'époque moderne. S'il est indéniable que l'esprit de l'axiomatique était déjà perceptible dans les exposés déductifs traditionnels - la logique aristotélicienne et la géométrie euclidienne -, il n'en demeure pas moins qu'ils fussent attachés à l'intuition. C'est pourquoi on les qualifie d'axiomatiques concrètes, matérielles ou théories déductives intuitives.

> On peut appeler, concrète, matérielle ou intuitive une théorie demeurée au stade préaxiomatique, c'est-à-dire qui maintient encore le contact avec les connaissances qu'elle organise, et qui présente un contenu conservant son sens et sa vérité empiriques. C'est le cas de la géométrie ordinaire [géométrie euclidienne], telle qu'on l'enseigne traditionnellement dans les écoles. (R. Blanché, 1959, p. 37).

Aux axiomatiques concrètes se sont substituées les axiomatiques formalisées au XIX^{e} siècle. Ces dernières ont, nous semble-t-il, quatre principaux réquisits.

1. En premier lieu, il y a les indéfinissables. Ce sont des termes considérés comme premiers qui sont admis au début de l'élaboration de toute

axiomatique, et qui ne font l'objet d'aucune définition. Ceux-ci doivent être clairement énoncés.

2. En second lieu, on peut mentionner les indémontrables. Ce sont des propositions premières, qui ne faisant l'objet d'aucune démonstration, doivent être admises et mentionnées de façon explicite au début de la théorie. Toutefois, au lieu d'être catégoriques comme les postulats et les axiomes traditionnels, les propositions premières sont plutôt relatives ; parce que posées hypothétiquement. Et c'est en ce sens relatif que nous devons entendre les notions suivantes : « premier » », « indéfinissable », « indémontrable ». L'usage de ceux-ci n'étant valable qu'à l'intérieur du système axiomatique lui-même.

3. En troisième lieu, seuls sont à considérer les rapports logiques entre les termes et propositions du système, indépendamment de leur contenu intuitif.

4. Enfin, les règles, grâce auxquelles ces rapports logiques sont possibles, c'est-à-dire les règles logiques, doivent à leur tour, être spécifiées d'avance.

En réalité, les deux derniers réquisits nous donnent la pleine mesure de ce que nous voulions atteindre lorsque nous décidons de mettre sous forme axiomatique toute théorie déductive. Mieux, ils expriment clairement le but assigné à l'axiomatique.

> Le but qu'on se propose quand on met sous forme axiomatique une théorie déductive, c'est de la dégager des significations concrètes et intuitives sur lesquelles elle a d'abord été construite, afin d'en faire clairement apparaître le schéma logique abstrait. (R. Blanché, 1959, p. 47).

P. Thiry (2004, p. 54) est d'un avis analogue : « Le but de la méthode axiomatique est de retrouver toutes les expressions valides d'un système à partir de quelques axiomes posés au départ. Un système axiomatique est donc un système hypothético-déductif ».

La vérité revêt un caractère relatif à l'intérieur des axiomatiques formalisées. A n'en pas douter, il y a un certain arbitraire, une certaine liberté qui règne dans le choix des postulats que nous mettons à la base de toute axiomatique formalisée. Contrairement aux postulats traditionnels qui revêtaient un caractère absolu, ils sont plutôt posés à titre d'hypothèses. Ce qui justifie leur caractère relatif. Encore faut-il préciser que le relativisme qui règne dans le choix des postulats d'une axiomatique formalisée ne nous donne en aucun cas le droit de les choisir n'importe comment. Dans une axiomatique formalisée, nous sommes libres de choisir les postulats constitutifs de la base du système considéré. Mais, cette liberté obéit à des conditions. On doit les choisir de telle sorte qu'il y ait une cohérence entre eux. L'axiomatisation des sciences déductives au XIXe siècle est beaucoup plus axée sur l'idée de cohérence logique que sur celle de vérité absolue. Ainsi, l'axiomatique formalisée apparaît comme un mode d'exposition rigoureux des sciences déductives.

Les démonstrations faites à l'intérieur des axiomatiques formalisées génèrent, en ce sens, des vérités relatives. Démonstration et vérité n'ont de sens qu'à l'intérieur du système axiomatique considéré. En dehors de ce système, elles ne signifient plus rien. Il y a alors un échec des idéaux déductifs aristotélicien et euclidien. Il n'y a ni démonstration, ni vérité évoluant en un sens unique ; c'est-à-dire de façon absolue. Mais, il y a des vérités et des démonstrations à l'intérieur de divers systèmes. La logique et la géométrie ne correspondent plus à notre expérience sensible, celles-ci ne disent pratiquement rien sur le monde concret, mais donnent des indications sur toutes les virtualités (tous les mondes possibles). L'esprit de l'axiomatique rime avec une certaine « plasticité de la raison » ou, ce qui revient au même, avec une « raison plastique ». (R. Blanché, 1973, p. 107). Plastique, en ce sens que l'axiomatique n'a plus rien à voir avec notre intuition sensible. Elle a des principes purement abstraits qui, désormais, dépassent les cadres traditionnels de notre raison. Il devient alors tentant de dire que la raison humaine connaît une véritable mutation, voire une profonde révolution à l'époque moderne.

Le caractère abstrait des principes rationnels occasionne l'éclosion d'une pluralité de systèmes déductifs abstraits. On assiste, de ce fait, à la naissance de systèmes non classiques - les logiques non aristotéliciennes et les géométries non euclidiennes - qui viennent ainsi ruiner l'absolutisme des systèmes classiques. La naissance de tels systèmes indique qu'il y a une liberté de création du mathématicien et du logicien modernes, laquelle les amène à faire fi de l'expérience concrète, pour élaborer leurs différentes théories. Le cas de la logique trivalente (logique non classique) du polonais J. Lukasiewick est tout à fait révélateur. J. Lukasiewick observe trois valeurs de vérité. Aux valeurs traditionnelles de vérité que sont le vrai (1) et le faux (0), celui-ci ajoute une troisième qu'il appelle le possible (1/2). Chez J. Lukasiewick, la négation de la valeur tierce, c'est-à-dire du possible ne modifie rien du tout. Elle reste toujours identique à elle-même. Ici apparaît alors l'originalité de ce logicien. Elle tient au fait que la valeur tierce qu'il a mise en place lui permet de progresser dans l'abstraction. Car, elle jette bas les lois du tiers exclu (une proposition est vraie ou fausse) et de contradiction (il est faux d'avoir une proposition qui soit à la fois vraie et fausse), qui jusque-là étaient considérées comme des lois immuables de la raison. Comme le note R. Blanché (1996, p. 103-104) :

> Certaines propositions essentielles de la logique bivalente tombent. Il est clair, d'abord, que ne subsistent ni le principe du tiers exclu, puisque précisément le nouveau calcul admet une valeur tierce, ni celui de contradiction, puisque dans le cas de la valeur tierce la négation est équivalente à l'affirmation, en vertu de la matrice même de la négation, et peut par conséquent lui être conjointe.

Les modernes, par la méthode axiomatique, ont introduit la relativité dans la présentation des théories déductives. Dès lors, le caractère tautologique ou contradictoire d'une loi n'est pas ontologique. Cela dépend du système d'axiomes auxquels on la rapporte. On retrouve l'écho d'une telle idée chez R. Carnap, lorsqu'il parle du « principe de tolérance de la syntaxe ». Selon lui, il est patent que chacun pose librement les règles de la logique qu'il entend suivre, pourvu qu'il les déclare expressément et que ces règles forment un système cohérent.

Au niveau de la géométrie, nous observons aussi des géométries plus abstraites que celle d'Euclide telles que la géométrie de G. F. B. Riemann et celle de N. I. Lobatchevski. En effet, là où Euclide pouvait mener une seule parallèle par un point pris en dehors d'une droite, N. I. Lobatchevski pouvait en mener une pluralité, quand G. F. B. Riemann n'en voyait aucune, à l'intérieur de sa géométrie. Pour H. Poincaré, la question de savoir si telle ou telle géométrie est vraie ou fausse, ou plus vraie ou plus fausse qu'une autre, n'est plus à l'ordre du jour. Elle n'a aucun sens. H. Poincaré parle de commodité. Car, comme il le dit si bien, « une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode ». (H. Poincaré, 1943, p. 67). Par cette pensée de H. Poincaré, est ainsi nettement exprimé le caractère tout à fait relatif de la vérité en géométrie.

Les exigences de rigueur logique ont amené les modernes à se fier aux axiomatiques formalisées pourvoyeuses, selon eux, de théories déductives idéales. Mais, là encore, ceux-ci ont répudié l'intuition intellectuelle, ils ont substitué le raisonnement pensé ou même parlé, par un calcul opéré par le truchement des signes ou symboles. On peut, certes, avancer l'idée que les calculs sous lesquels se présentent désormais les sciences déductives que nous venons de passer en revue leur permettent de progresser dans le sens de l'abstraction, de la sécurité et de l'objectivité. Néanmoins, un problème subsiste : celui de la non-contradiction des axiomes sur lesquels reposent ces calculs. À quelles conditions une axiomatique formalisée peut-elle être non contradictoire ? Peut-on extirper l'intuition des axiomatiques formalisées ?

3. La résurgence de l'intuition dans les axiomatiques formalisées ou l'échec d'un idéal déductif

Il y a un échec de l'idéal déductif, en raison de la résurgence de l'intuition dans les axiomatiques formalisées. Sa résurgence pose le problème crucial de la consistance des sciences déductives. Ce problème est solidaire de celui du fondement des mathématiques (ou la crise des fondements des mathématiques). Ce dernier constitue, à son tour, une véritable pomme de discordes entre les mathématiciens eux-mêmes, les logiciens ainsi que les épistémologues, notamment entre les formalistes, les intuitionnistes et K. Gödel.

Nous savons depuis la fin du XIX^{e} siècle avec le mathématicien allemand G. Cantor que toute la mathématique se fonde sur l'arithmétique. La théorie cantorienne des ensembles prétend être aux fondements de tout l'édifice mathématique. Le principe de G. Cantor est le suivant :

> Deux ensembles ont la même taille si chaque élément de l'un peut être mis en relation exclusive avec chaque élément de l'autre. Ne pouvant mettre en relation chaque nombre réel, il en déduisit qu'il y a infiniment plus de réels que d'entiers : l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. (P. Pajot, 2013, p. 111-120).

Dès lors que les nombres entiers n'étaient qu'une petite classe dans l'ensemble des nombres cardinaux transfinis, rien n'interdisait de construire une notion comme celle de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme éléments. Cependant, B. Russell avait montré dès 1903 que la théorie cantorienne des ensembles conduisait à une antinomie, dès qu'on se pose la question parfaitement licite de savoir si un tel ensemble à son tour se contient lui-même comme élément. B. Russell en vient à considérer que l'existence de l'ensemble de tous les ensembles est contradictoire. Se trouve alors à l'origine de la « crise des fondements » l'épineuse question suivante : « l'ensemble de tous les éléments-qui-ne-se contiennent pas eux-mêmes comme éléments se contient-il lui-même comme élément ? » (R. Blanché, 1959, p. 85).

Face à cette question, on assiste à une floraison de positions susceptibles de se compléter mais aussi de se contredire, notamment entre les formalistes, les intuitionnistes et Kurt Gödel. Par formaliste, il faut entendre cette catégorie de penseurs qui soutient la thèse selon laquelle l'approche scientifique et, en particulier, mathématique doit exclure tout recours à l'intuition sensible, et s'attacher à de purs symboles abstraits. Cette thèse connue sous le vocable de formalisme, a pour figure de proue D. Hilbert. Pour lui, il est impérieux de faire reposer la mathématique sur une base solide. La seule façon de préserver la mathématique de toute éventuelle contradiction, et par là même de la rendre consistante, est d'astreindre son fondement - l'arithmétique, sinon la théorie des ensembles - à une présentation axiomatique. Il est donc loisible de reconstruire la théorie des ensembles. Que faut-il faire de façon précise ? Il faut l'exposer « sous la forme axiomatique, les axiomes étant choisis de manière telle qu'ils ne permettent plus la déduction des antinomies ». (R. Blanché, 1972, p. 102).

Or, chez D. Hilbert, dire qu'une notion mathématique a la propriété d'exister, dénote exactement que celle-ci est non-contradictoire. Ce qui veut dire que l'existence mathématique et la non-contradiction vont de pair. Ce sont deux formules interchangeables. Par conséquent, les axiomes que nous mettons à la base de l'édifice mathématique tout entier ne peuvent être vrais qu'à la seule condition où ceux-ci ne se contredisent pas eux-mêmes. Chez D. Hilbert, la non-contradiction est le seul critère de la vérité et de l'existence mathématique.

Mais, comment les formalistes comptent-ils arriver à la non-contradiction des axiomes initiaux, pouvant établir ainsi la consistance du système déductif ?

Pour D. Hilbert et son école, il faut établir la consistance du système en démontrant qu'il a été construit de manière à ce qu'il soit exempt de toute contradiction. D'où la nécessité d'une théorie de la démonstration. Toutefois, la démonstration à laquelle Hilbert fait allusion ici revêt un sens très particulier. Elle requiert la constitution d'une nouvelle science dénommée la métamathématique. La métamathématique est la science du discours mathématique, discours entièrement symbolisé. Elle s'intéresse, non pas aux objets mathématiques habituels, mais plutôt aux propositions mathématiques elles-mêmes. La mathématique hilbertienne, en tant que formalisation de l'axiomatique, vise un degré plus élevé d'abstraction. Elle se veut plus simple et plus explicative par rapport à l'axiomatique. Par conséquent, elle

> doit permettre d'établir par voie démonstrative, sans avoir besoin d'en appeler au sentiment subjectif de l'évidence, si un système d'axiome est ou non consistant. Si une telle démonstration peut être donnée favorablement pour une axiomatique de la théorie des ensembles, le problème du fondement est résolu. (R. Blanché, 1959, p. 87-88).

Ce principe de pureté des méthodes prend aussi bien de l'ampleur au niveau de la logique, où l'on assiste à la naissance d'une nouvelle science : la métalogique. Ce vocable est employé en 1930 dans un mémoire par J. Lukasiewicz et A. Tarski. La métalogique a les mêmes effets que la métamathématique. Dans ce sens, elle a pour objectif d'étudier, non pas les objets logiques ordinaires, mais les propositions logiques elles-mêmes.

À la position des formalistes, s'oppose celle des intuitionnistes. Les intuitionnistes appartiennent à cette catégorie de penseurs qui prônent la thèse de l'intuitionnisme. C'est une philosophie mathématique mise en place par des mathématiciens de l'école hollandaise avec L. E. J. Brouwer et d'A. Heyting. Selon cette philosophie, les mathématiques sont, en majeure partie, intuitives et donc, elles n'ont pas seulement une signification formelle. Pour les tenants de cette thèse, le contenu intuitif est d'une grande importance en mathématique. Par conséquent, ceux-ci accordent à l'intuition un rôle fondamental dans la recherche du vrai.

> Les antinomies [dans l'esprit des intuitionnistes] viennent de ce que nous continuons à appliquer aveuglément aux ensembles infinis les règles de notre logique notamment celles du tiers exclu et de la double négation, règles qui ont été dégagées à partir de raisonnements portant sur des collections finies, mais dont nous ne pouvons être sûrs d'avance qu'elles s'appliqueront encore quand nous aborderons un domaine nouveau. (R. Blanché, 1972, p. 105).

Avec eux, c'est l'intuition qui prime sur les règles logiques. C'est elle « qui juge, en dernier ressort, de la validité même des règles logiques ; de sorte que si on lui donne toujours le pas sur le discours, on ne s'exposera plus à des antinomies ». (R. Blanché, 1959, p. 85). Dans cette perspective, L. E. J. Brouwer et d'A. Heyting ne font pas de la non-contradiction la condition de l'existence des mathématiques, et, par extension, de la consistance des sciences déductives. La consistance des sciences déductives requiert leur construction effective dans l'intuition. Pour s'assurer donc de l'existence d'une notion, qu'elle soit logique ou qu'elle soit mathématique, « il faut pouvoir la construire dans l'intuition, ou du moins indiquer la règle qui permettrait de la construire effectivement en un nombre fini d'étapes ». (R. Blanché, 1972, p. 95).

Face à l'âpreté du conflit entre formalistes et intuitionnistes - eu égard à la question de la consistance des mathématiques en particulier, et des sciences déductives en général - le logicien américain d'origine autrichienne K. Gödel pose certaines interdictions ou limites. Ces interdictions concernent les démonstrations de non-contradiction de l'arithmétique. En effet, K. Gödel se dresse contre le formalisme hilbertien qui fait de la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique un rempart contre les antinomies cantoriennes. Et, partant, la seule manière de fonder les mathématiques, sinon l'ensemble des sciences déductives sur une base solide. Cette théorie de la démonstration dénommée la métamathématique présente bien des limites aux yeux de K. Gödel. Pour lui, la non-contradiction de l'arithmétique ne peut être démontrée. Et c'est même une illusion que de croire à la possibilité d'une telle démonstration. C'est en 1931 que K. Gödel fit cette découverte qui est d'une importance capitale. Comme nous l'apprend R. Blanché (1972, p. 104) :

> Celui-ci en appliquant précisément les méthodes formelles de la métamathématique, prouve que pour démontrer qu'un système formel n'est pas contradictoire, il faut faire appel à des moyens de démonstration plus forts que ceux du système, et sur lesquels par conséquent, la question de non-

> contradiction se trouve reportée, et ainsi de suite indéfiniment. Ainsi, le formalisme ne peut se fermer sur lui-même.

Cette remarque de R. Blanché met en pleine lumière les deux théorèmes fondamentaux de la métamathématique auxquels est parvenu Gödel au terme de son investigation : « premièrement qu'une arithmétique non-contradictoire ne pouvait constituer un système complet, et comporte nécessairement des énoncés indécidables ». (R. Blanché, 1959, p. 60). Ce qui veut dire que pour démontrer la non-contradiction de l'arithmétique, (ou de n'importe quelle science), il est capital que l'on fasse appel à des notions qui lui sont étrangères. Il faut faire appel à des notions qu'on considère déjà comme vraies, par exemple les propositions indécidables, qui sont des propositions pour lesquelles on peut établir que sont également indémontrables l'énoncé Q et l'énoncé non Q. Par ce premier théorème, K. Gödel nous interdit de croire à l'existence d'un système complet.

Par conséquent, tout système quelle que soit sa nature comporte toujours du « vrai non prouvable ». (R. Blanché, 1959, p. 61). À l'analyse, la notion de vérité déborde toujours celle de la démonstrabilité. C'est dans ce sens qu'on peut qualifier ce premier théorème d'incomplétude. En second lieu, l'affirmation de la non-contradiction d'un système figure précisément parmi ces propositions indécidables. Par ce deuxième théorème, K. Gödel révèle une autre limite de la démonstration de la non-contradiction de D. Hilbert. Car, la non-contradiction est pour lui ce qui doit être posé comme postulat. Comme telle, elle ne peut et ne doit faire l'objet d'aucune démonstration. K. Gödel rejette ainsi cette tendance des formalistes à vouloir tout démontrer. En un mot, l'on ne peut tout démontrer à l'intérieur d'un système. Cela y va de sa propre vitalité.

En mettant en lumière les limites de la thèse formaliste, Gödel a introduit *ipso facto* une certaine relativité dans l'appréciation du problème de la consistance des mathématiques, et par extension des sciences déductives en général. Ni les formalistes n'ont eu raison sur les intuitionnistes, ni l'inverse. De cette manière, leurs différents systèmes, leurs différentes positions - quoique contradictoires - se valent, du moment que chacun demeure cohérent, en se conformant, bien entendu, aux règles logiques qu'il s'est lui-même assigné.

Conclusion

De l'avis de P. Pajot (2013, p. 22-23), « le raisonnement humain est faillible, et comporte une part d'intuition. Mais aussi d'implicite [...] ». L'axiomatique formalisée ne saurait dans ce cas s'opposer de façon radicale à l'intuition. L'objectivité des sciences déductives, la logique et la géométrie, reste tributaire de la relation qu'il y a entre les deux notions. Partant, l'axiomatique formalisée nous permet d'atteindre un idéal déductif, non pas, en tant qu'elle résorbe définitivement l'intuition ou l'expérience à l'intérieur des sciences déductives, mais plutôt, parce qu'elle fait plus apparaître leur forme abstraite que leur forme concrète.

Elle nous fait progresser dans le sens de l'abstraction, de la rigueur, de la précision et de la cohérence logique dans les sciences précitées, sans pour autant ruiner toute matière intuitive au sein de ces dernières. P. Oléron (1989, p. 74) s'exprime d'une manière identique :

> Les élaborations de la logistique et de l'axiomatique aboutissent à des systématisations qui ne font apparaître que des caractéristiques formelles, exprimées par des symbolismes qui n'impliquent pas de référence à des contenus. Ces systématisations ne correspondent cependant pas à un univers logique qui existerait en totale indépendance de la réalité concrète. Elles sont le fruit d'un effort, toujours inachevé, s'exerçant à partir de cette réalité et des premières élaborations qu'elles cherchent à pousser davantage, mais non sans devoir y revenir pour conserver un sens de cet effort.

L'axiomatique n'a de sens et de réalité à l'intérieur des sciences déductives que par rapport à l'intuition, à l'interprétation concrète qu'on lui donne. L'axiomatique n'est pas fondamentalement aux antipodes de l'intuition, puisque ce que nous tenons, aujourd'hui, pour une axiomatique, en tant que pur système abstrait, peut demain passer du côté de l'intuition, et cela indéfiniment. On parvient donc à l'idée que les sciences déductives ne sont pas des systèmes clos et totalement abstraits, mais des systèmes dynamiques et ouverts.

Références bibliographiques

BLANCHÉ Robert, 1996, *Introduction à la logique contemporaine*, Paris, Masson et Armand Colin.

BLANCHÉ Robert, 1959, *L'axiomatique*, Paris, P. U. F.

BLANCHÉ Robert, 1970, *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*, Paris, Armand colin.

BLANCHÉ Robert, 1973, *La science actuelle et le rationalisme*, Paris, PUF.

BLANCHÉ Robert, 1972, *L'épistémologie*, Paris, P.U.F.

BOURBAKI Nicolas, 1962, « l'architecture des mathématiques », François Le Lyonnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, librairie scientifique et technique, A. Blanchard, p.35-47.

BOURBAKI Nicolas, 1969, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann.

DESCARTES René, 1966, *Discours de la méthode suivi d'extraits de la Dioptrique, des Météores, de la Vie de Descartes, du Monde, de L'homme et de Lettres*, Paris, GF-Flammarion.

KANT Emmanuel, 1944, *Critique de la raison pure*, traduit de l'allemand par A. Tremesaygues et B. Pacaud, Paris, Quadrige/ P. U. F.

LAKATOS Imre, 1984, *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, traduit de l'anglais par Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde, Paris, Hermann.

OLÉRON Pierre, 1989, « Le raisonnement », *Que sais-je ?*, Paris, P. U. F.

PAJOT Philippe, 2013, « penser types plutôt qu'ensembles », *Science et vie* n°1153, p. 111-120.

PAJOT Philippe, 2013, « Théorèmes, l'ordinateur fait ses preuves », *Hors-série Sciences et avenir,* Octobre/Novembre, p. 22-23.

POINCARE Henri, 1943, *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion/ Cie.

RUSS Jacqueline et BADAL-LEGUIL, 2004, *Dictionnaire de philosophie*, Paris, Bordas.

THIRY Philippe, 2004, *Notions de logique*, 3e édition, Bruxelles, édition de Boeck et Larcier, (première édition 1998).